

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(СПбГУ)

Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц  
Направление «Физика»



**ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ ПРИ ОПИСАНИИ ГРАВИТАЦИИ В ФОРМЕ  
ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЯ**

Бакалаврская работа студента

**Капустина Александра Дмитриевича**

Научный руководитель:

..... д.ф.-м.н., проф. **Пастон Сергей Александрович**

Рецензент:

..... к.ф.-м.н., нс. **Семенова Алла Николаевна**

Санкт-Петербург

2018

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
1.1	Решение Шварцшильда . . . . .	2
1.2	Вечные черные дыры и мотивировка задачи о коллапсе . . . . .	2
1.3	Подход к гравитации в форме теории вложения . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Описание коллапса в сопутствующей системе отсчета</b>	<b>4</b>
2.1	Сопутствующие координаты и общие уравнения гравитационного поля с пылевидной материей . . . . .	4
2.2	Решение внутренней задачи для однородного шара . . . . .	7
2.3	Выбор параметров для решения внешней задачи . . . . .	8
2.4	Попытка гладкого сшивания метрики на границе пылевидного шара . . . . .	9
2.5	Условия Израэля . . . . .	10
2.6	Построение вложения для коллапса однородного шара с начальным радиусом, совпадающим с радиусом Шварцшильда . . . . .	12
2.6.1	Вложение закрытой модели Фридмана . . . . .	13
2.6.2	Вложение Фронсдала для геометрии Шварцшильда . . . . .	13
2.6.3	Поверхность сшивки . . . . .	14
2.6.4	Конечные формулы вложения . . . . .	16
2.7	Построение вложения для коллапса однородного шара с произвольным начальным радиусом . . . . .	19
2.7.1	Сшивка вложения Фридмана с семимерной модификацией Фронсдала . . . . .	19
2.7.2	Конечные формулы вложения . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Построение коллапса однородного пылевидного шара без сшивания решений</b>	<b>22</b>
3.1	Непрерывная метрика для коллапса однородного шара . . . . .	23
3.2	Построение вложения непрерывной метрики и конечные формулы . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>25</b>
<b>A</b>	<b>Приложения</b>	<b>25</b>
A.1	Обращение параметрической зависимости, функция $y(x)$ . . . . .	25

# 1 Введение

## 1.1 Решение Шварцшильда

В 1916 году Карлом Шварцшильдом было найдено точное решение вакуумных уравнений Эйнштейна в отсутствии  $\Lambda$ -члена и в предположении о наличии сферической симметрии [1]

$$G^{\mu\nu} = \kappa T_m^{\mu\nu}, \quad (1)$$

где  $G^{\mu\nu}$  — тензор Эйнштейна,  $\kappa$  — гравитационная постоянная Эйнштейна,  $T_m^{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса материи, определяемый выражением

$$T_m^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2)$$

Соответствующим выбором координат для данного решения можно получить диагональную метрику, задающую квадрат линейного элемента в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2). \quad (3)$$

Здесь и во всех дальнейших выкладках предполагается, что сигнатура метрики  $(+, -, -, -)$ , скорость света  $c = 1$ , а  $R$  — радиус Шварцшильда.

Можно заметить, что в таких координатах метрика статична, по крайней мере, за пределами радиуса Шварцшильда для любого, в том числе для движущегося, сферически симметричного распределения материи. В эти же условия погружается и задача о коллапсе сферического ограниченного тела, которая будет рассматриваться в дальнейшем. По теореме Биркгофа решение в виде геометрии Шварцшильда единственно для пустой области пространства со сферической симметрией [2], т.о. можно утверждать, что именно геометрия Шварцшильда описывает ту область пространства, которая является внешней по отношению к коллапсирующей материи.

## 1.2 Вечные черные дыры и мотивировка задачи о коллапсе

В случае, когда гравитирующая материя полностью сосредоточена под собственным гравитационным радиусом, геометрия Шварцшильда описывает пространство в том числе и под гравитационным радиусом. Описание движения с помощью геометрии Шварцшильда в таких условиях приводит к предсказанию достаточно интересной структуры геодезических и, вообще, любых мировых линий частиц. Тот факт, что любая материя, и в том числе свет, попав под гравитационный радиус, уже не могут выйти наружу, приводит к тому, что данное массивное тело называется черной дырой. В случае, когда вся материя расположена в центральной сингулярности, черная дыра называется вечной. Для вечной черной дыры можно изучить всю структуру риманова многообразия путем перехода от описания геометрии в Шварцшильдовских координатах, имеющего координатную особенность при  $r = R$ , к описанию той же самой геометрии в каких-либо других координатах, в которых эта особенность отсутствует. Одним из примеров координатной системы, покрывающей всю структуру риманова многообразия, является координаты Крускала-Шекереса [2].

На приведенной на Рис.1 диаграмме описана структура многообразия в случае вечной черной дыры. Как видно, на ней кроме нашей вселенной и черной дыры присутствуют

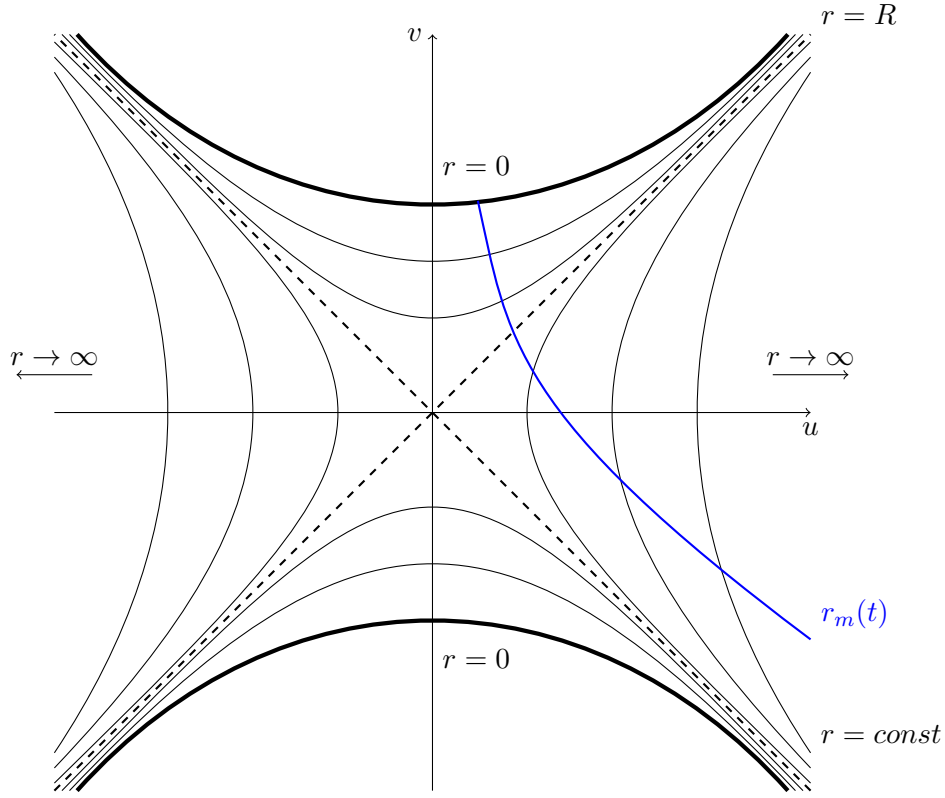


Рис. 1: Диаграмма Крускала - Шекереса

еще одна сингулярность (так называемая белая дыра) и еще одна область, симметричная нашей вселенной, которую можно трактовать, как некоторую параллельную вселенную. На опыте, однако, никакие явления, показывающие наличие белой дыры не наблюдаются. Если же рассматривать коллапс некоторой реальной звезды, то осмысленной остается только часть диаграммы, отсеченная кривой  $r_m(t)$ , соответствующей мировой линии частицы, расположенной на поверхности коллапсирующей звезды, потому что геометрия Шварцшильда имеет место только в области, в которой отсутствует материя. Для описания же пространства внутри коллапсирующей звезды нужно решать уравнения Эйнштейна в присутствии материи одновременно с уравнениями движения самой материи, что в общем случае представляет довольно сложную задачу. Однако, в некоторых частных случаях такие решения были найдены. Анализ пространства внутри коллапсирующей звезды необходим для описания полной структуры многообразия, поэтому решение некоторых частных задач представляет большой интерес. В данной работе исследуется коллапс шара, состоящего из пылевидной материи. Выбор пылевидной материи упрощает задачу тем, что все частицы материи движутся, не отклоняясь от геодезических, и уравнения движения пылевидной материи следуют из уравнений гравитационного поля. Оставшиеся уравнения поля допускают дальнейший анализ, позволяющий описать геометрию внутри сферы.

### 1.3 Подход к гравитации в форме теории вложения

Теория вложения — подход к гравитации, в котором искривленное пространство-время рассматривается как риманово многообразие, вложенное в плоское пространство большего числа измерений. Он был впервые предложен Редже и Тейтельбоймом в работе [3]. Со-

гласно теореме Жане-Картана, обобщенной А.Фридманом [4] на псевдоевклидов случай, такое вложение в общем случае локально существует, если объемлющее пространство имеет  $N \geq \frac{d(d+1)}{2}$  измерений, по крайней мере одно из которых времениподобное, а три — пространственноподобные. Предполагается также аналитичность метрики, в противном случае, ограничение должно быть усилено. Следовательно для 4-х мерного пространства должно хватать 10 измерений. В случае же наличия дополнительных симметрий у пространства времени, размерность объемлющего пространства может быть значительно снижена.

В таком подходе многообразие задается как поверхность, набором функций вложения  $y^a(x^\mu)$ , зависящих от координат на многообразии, и преобразующихся как скаляр относительно общековариантной группы преобразований координат на многообразии. Метрика, определяющая многообразие, считается индуцированной, то есть отвечающей измерению малых расстояний по метрике объемлющего пространства. Она определяется функциями вложения согласно следующей формуле

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \partial_\mu y^a \partial_\nu y^b, \quad (4)$$

где  $\eta_{ab}$  — метрика объемлющего пространства. При построении вложения заданной геометрии, равенство (4) можно воспринимать как уравнения на функции вложения.

Изучение геометрии вложенной поверхности оказывается полезным для анализа полной структуры многообразия. Например, упоминавшиеся ранее диаграммы Крускала тесно связаны с вложением Фронсдала [5] для вечной черной дыры. В связи с этим возникает интерес к описанию в терминах теории вложения черной дыры с распределенной материей или коллапса, в результате которого происходит образование горизонта черной дыры. Эта задача обладает меньшей симметрией, чем задача вложения вечной черной дыры, для которой существует набор известных решений, представленный в книге [6].

## 2 Описание коллапса в сопутствующей системе отсчета

### 2.1 Сопутствующие координаты и общие уравнения гравитационного поля с пылевидной материей

Кроме упрощения системы дифференциальных уравнений в случае пылевидной материи можно осуществить выбор удобной системы координат. Для пылевидной материи возможен выбор сопутствующей и, вместе с тем, синхронной системы отсчета [1]. В таких координатах линейный элемент запишется в виде

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\lambda(\tau, \chi)} d\chi^2 - r(\tau, \chi)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5)$$

Действительно, выбором из четырех координат углов  $\theta$  и  $\varphi$  в качестве двух можно удовлетворить сферической симметрии, а выбором оставшихся двух  $\tau$  и  $\chi$  удовлетворить двум требованиям: единичной компоненты  $g_{00}$  и нулевой компоненты  $g_{01}$ . В этих координатах можно явно записать тензор энергии - импульса пылевидной материи

$$T_m^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \underset{p=0}{=} \rho u^\mu u^\nu, \quad (6)$$

а так как в сопутствующей системе отсчета

$$u^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

компоненты тензора энергии - импульса равны

$$T_m^{00} = \rho, \quad T_m^{0i} = T_m^{ik} = 0. \quad (8)$$

Уравнения (1) могут быть переписаны в виде

$$R^{\mu\nu} = \kappa \left( T_m^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_m^\alpha{}_\alpha g^{\mu\nu} \right), \quad (9)$$

где  $R^{\mu\nu}$  — тензор Риччи. Его компоненты, используя вид метрики (5), можно выразить в терминах неизвестных функций  $\lambda(\tau, \chi)$  и  $r(\tau, \chi)$  и, подставив их в (9), получить систему дифференциальных уравнений на эти функции. Нетривиальными из них будут следующие

$$-e^{-\lambda} r'^2 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1 = 0, \quad (10)$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{r}(2r'' - r'\lambda') + \frac{\dot{r}\dot{\lambda}}{r} + \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} + \frac{2\ddot{r}}{r} = 0, \quad (11)$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{r^2}(2rr'' + r'^2 - rr'\lambda') + \frac{1}{r^2}(r\dot{r}\dot{\lambda} + \dot{r}^2 + 1) = \kappa\rho, \quad (12)$$

$$2\dot{r}' - \dot{\lambda}r' = 0, \quad (13)$$

где точка означает дифференцирование по  $\tau$ , а штрих — по  $\chi$ .

Эта система содержит два отдельно стоящих решения, получающихся из ограничения на характер зависимости функции  $r(\tau, \chi)$  от своих переменных. Если считать, что  $r$  зависит только от  $\chi$ , то уравнение (13) принимает вид

$$\dot{\lambda}r' = 0, \quad (14)$$

а так как  $r = \text{const}$  противоречит уравнению (10), следует считать  $\dot{\lambda} = 0$ , т.е.  $\lambda = \lambda(\chi)$ . С учетом этих условий уравнение (10) дает

$$r'^2 = e^\lambda, \quad (15)$$

$$r'' = \frac{1}{2}r'\lambda', \quad (16)$$

и тогда подстановка в (11) дает тождество, а подстановка в (12) дает условие разрешимости

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} \right) = 0. \quad (17)$$

Таким образом случай  $r = r(\chi)$  является решением для пустого пространства, причем в этом случае линейный элемент выражается как

$$ds^2 = d\tau^2 - r'(\chi)^2 d\chi^2 - r(\chi)^2 d\Omega, \quad (18)$$

что можно переписать как

$$ds^2 = d\tau^2 - dr^2 - r^2 d\Omega, \quad (19)$$

а это ничто иное, как метрика плоского пространства Минковского в сферических координатах, что соответствует отсутствию материи во всем пространстве, а это не соответствует условиям задачи о коллапсе.

Второе особое решение находится в предположении, что  $r = r(\tau)$ . Этот случай разбирается в [7] и также не совмещается с условиями задачи.

В случае общего положения  $r = r(\tau, \chi)$ . Начать можно снова с уравнения (13), оно интегрируется по времени и получается

$$e^\lambda = \frac{r'^2}{1 + f(\chi)}, \quad (20)$$

где  $f(\chi)$  — произвольная функция, не меньшая  $-1$ . Подстановка полученного результата в уравнение (10) дает уравнение на  $r$

$$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f = 0, \quad (21)$$

которое решается подстановкой

$$\dot{r} = \pm \sqrt{f + \frac{F}{r}}, \quad (22)$$

где  $F(\chi)$  — произвольная функция радиуса. Интегрирование выражения (22) дает зависимость  $r(\tau)$ . Эту зависимость удобно представить в параметрическом виде, однако она будет разной в зависимости от знака  $f(\chi)$ :

$$r = \frac{F(\chi)}{2f(\chi)}(\operatorname{ch} \eta - 1), \quad \tau_0(\chi) - \tau = \frac{F(\chi)}{2f(\chi)^{3/2}}(\operatorname{sh} \eta - \eta), \quad \text{при } f(\chi) > 0, \quad (23)$$

$$r = \left( \frac{9F(\chi)}{4} \right)^{\frac{1}{3}} [\tau_0(\chi) - \tau]^{\frac{2}{3}} \quad \text{при } f(\chi) = 0, \quad (24)$$

$$r = \frac{F(\chi)}{2(-f(\chi))}(1 - \cos \eta), \quad \tau_0(\chi) - \tau = \frac{F(\chi)}{2(-f(\chi))^{3/2}}(\eta - \sin \eta), \quad \text{при } f(\chi) < 0, \quad (25)$$

где  $\tau_0(\chi)$  — еще одна произвольная функция радиуса. Так как в дальнейшем не будет использоваться одна из параметризаций, удобно ввести функцию  $y(x)$ , которую использовать для обозначения обращенной параметрической зависимости

$$y = 1 - \cos \eta, \quad (26)$$

$$x = \eta - \sin \eta.$$

Тогда формулу (25) можно переписать в виде

$$r(\tau, \chi) = \frac{F(\chi)}{2(-f(\chi))} \cdot y \left( \frac{2(-f(\chi))^{3/2}}{F(\chi)}(\tau_0(\chi) - \tau) \right). \quad (27)$$

Подстановка полученных решений в уравнение (12) даст выражение для плотности

$$\rho = \frac{1}{\varkappa} \frac{F'}{r^2 r'}. \quad (28)$$

Тот факт, что в решении фигурирует три произвольные функции радиуса, а произвольное, сферически симметричное распределение материи задается двумя — начальной плотностью и распределением радиальных скоростей, связан с тем, что решение все еще допускает преобразования координат, заключающиеся в преобразовании координаты  $\chi \rightarrow \chi'(\chi)$ , оставляющие вид метрики неизменным.

Таким образом, имеется общее решение уравнений Эйнштейна с произвольным, сферически симметричным распределением пылевидной материи. Это решение приведено в книге [1]. Как говорилось ранее, уравнения движения пылевидной материи следуют из уравнений Эйнштейна, и в частности, в сопутствующей системе отсчета мировые линии материи будут совпадать с линиями времени, т.е.  $\chi = const$ ,  $\theta = const$ ,  $\phi = const$ . Тогда можно сказать, что параметр  $\chi$  «нумерует» частицы материи, а функция  $r(\tau, \chi)$  при фиксированном  $\chi$  определяет ее закон движения. Из приведенных формул видно, что поведение материи в некоторой области, определяемой координатами  $\chi$ , зависит только от задания функций  $f, F, \tau_0$  в этой области и не зависит от выбора тех же функций вне нее. По определению,  $r$  должно быть не отрицательно, и тогда  $F > 0$ . Также, удобно считать, что  $r$  растет с ростом  $\chi$ , а тогда  $r' > 0$ . О вкладе функций  $F(\chi)$ ,  $f(\chi)$  и  $\tau_0(\chi)$  в вид решения можно сказать следующее: из формул (27) и (26) видно, что  $\tau_0(\chi)$  имеет смысл момента падения частицы с «номером»  $\chi$  на сингулярность,  $F(\chi)$ , при еще одном требовании, будет иметь смысл гравитационного радиуса той части материи, которая «пронумерована» значениями от 0 до  $\chi$ . Действительно [1], общая масса материи в этой области определяется выражением

$$m = \frac{4\pi}{\varkappa} \int_0^{r(\tau, \chi)} \frac{F'}{r^2 r'} r^2 dr = \frac{4\pi}{\varkappa} \int_0^\chi F' d\chi = \frac{4\pi}{\varkappa} (F(\chi) - F(0)). \quad (29)$$

А тогда, если положить  $F(0) = 0$ ,

$$F(\chi) = \frac{\varkappa m}{4\pi} = R(m). \quad (30)$$

Про функцию  $f(\chi)$  можно сказать лишь то, что она некоторым образом влияет на пересчет координат  $\chi$  в  $r$ .

## 2.2 Решение внутренней задачи для однородного шара

Для того, чтобы получить определенное значение  $\rho(R)$  и  $\dot{r}(0, R)$ , нужно определить функции  $F, f, \tau_0$ . В частности, в книге [1] приведены функции для получения однородного шара

$$\begin{aligned} F(\chi) &= a \sin^3 \chi, \\ f(\chi) &= -\sin^2 \chi, \\ \tau_0(\chi) &= const. \end{aligned} \quad (31)$$

В таком случае зависимость  $r(\tau, \chi)$  в соответствии с формулой (27) запишется в виде

$$r(\tau, \chi) = \frac{a}{2} \sin \chi \cdot y \left( \frac{2}{a} (\tau_0 - \tau) \right). \quad (32)$$

Если считать, что при  $\tau = 0$  материя покоится, то

$$\tau_0 = \frac{\pi}{2} a. \quad (33)$$



И если выписать формулу для  $\rho$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \frac{F'}{r^2 r'} = \frac{1}{\kappa} \frac{\frac{a^3}{8} \sin^2 \chi \cos \chi}{\sin^2 \chi \cos \chi \cdot y \left( \pi - \frac{2}{a} \tau \right)^3} = \frac{1}{\kappa} \frac{3a}{\frac{a^3}{8} \cdot y \left( \pi - \frac{2}{a} \tau \right)^3}, \quad (34)$$

то можно заметить, что  $\rho$  является функцией только от  $\tau$ , т.е. распределение материи в каждый момент времени однородно.

Если постороить линейный элемент полученному решению, то получится

$$ds^2 = d\tau^2 - \left( \frac{a}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2}{a} \tau \right) \right)^2 \cdot (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)). \quad (35)$$

Видно, что внутреннее решение задачи коллапса однородного шара описывается закрытой моделью Фридмана с радиусом

$$a(\tau) = \frac{a}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2}{a} \tau \right). \quad (36)$$

Из вида функции  $y(x)$  можно понять, что коллапсу соответствует область значений параметра  $0 < \tau < \frac{\pi}{2}a$ . Симметричная ей область  $0 > \tau > -\frac{\pi}{2}a$  соответствует расширению шара из сингулярности, а момент  $\tau = 0$  соответствует наибольшему удалению. Если разрешить параметру  $\tau$  пробегать всю вещественную ось, то полученные решения будут описывать чередующиеся сжатия и расширения однородного шара, однако неясно, имеет ли это физический смысл, т.к. физика вблизи сингулярности неизвестна, и нельзя предсказать, как будет себя вести система на последней стадии коллапса [8].

### 2.3 Выбор параметров для решения внешней задачи

Вне шара, занимающего в координатах  $\chi$  область  $\chi < \chi_0$ , решение должно удовлетворять вакуумным уравнениям Эйнштейна. Это значит, что выбором параметров  $F, f, \tau_0$  нужно добиться нулевой плотности, т.к. это единственный параметр, отличающий тензор энергии-импульса (8) от нулевого. Кроме того, нужно постараться выбрать параметры так, чтобы внутренняя метрика  $g_{\mu\nu}^{in}$  непрерывно переходила на границе сферы в метрику пустого пространства  $g_{\mu\nu}^{out}$ .

Так как функция  $F(\chi)$  равняется гравитационному радиусу материи внутри соответствующего радиуса, для  $\chi > \chi_0$   $F(\chi) = R = const$ , что действительно соответствует нулевой плотности, так как по формуле (28)

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \frac{F'}{r^2 r'} = 0. \quad (37)$$

Выбор же функций  $f$  и  $\tau_0$  основан на требовании непрерывности метрики. Однако, согласно теореме Биркгофа, при любом выборе  $f$  и  $\tau_0$  получившаяся геометрия будет соответствовать геометрии Шварцшильда в некоторых координатах, и выбор функций отвечает за сшивку координатных сеток, т.е. построение единой системы отсчета. Проверка того, что получающаяся метрика

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{(r')^2}{1 + f(\chi)} d\chi^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad \text{где } r \text{ задается формулой (27),} \quad (38)$$

соответствует геометрии Шварцшильда в некоторых координатах, может быть проведена прямым вычислением тензора энергии-импульса, однако это вычисление слишком громоздко, чтобы его приводить.

## 2.4 Попытка гладкого сшивания метрики на границе пылевидного шара

Как было сказано в предыдущем разделе, задача сшивания метрик заключается в таком выборе функций  $f(\chi)$  и  $\tau_0(\chi)$ , чтобы метрика внешнего пространства на границе совпадала с внутренней метрикой шара покомпонентно во все моменты времени. Формульно это утверждение запишется в виде

$$g_{\mu\nu}^{in} \Big|_{\chi=\chi_0} = g_{\mu\nu}^{out} \Big|_{\chi=\chi_0}. \quad (39)$$

В книге [2] говорится о возможности описания коллапса звезды с помощью Фридмановской внутренней и Шварцшильдовой внешней метрики. Там же приводится анализ радиальных геодезических в пространстве с метрикой Шварцшильда, начинающихся и заканчивающихся в сингулярности. В случае если построение функций  $f$  и  $\tau_0$  не даст требуемого результата, для их осмысленной фиксации, можно будет найти эти функции из параметров упомянутых геодезических, задаваемых знакомыми формулами

$$\begin{aligned} r &= \frac{r_{max}}{2} (1 + \cos \eta), \\ \tau &= \frac{1}{2} \left( \frac{r_{max}^3}{R} \right)^{\frac{1}{2}} (\eta + \sin \eta). \end{aligned} \quad (40)$$

Так как метрики имеют особый вид (35) и (38) система (39) эквивалентна системе из двух равенств

$$\begin{aligned} \left( \frac{a}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2}{a} \tau \right) \right)^2 \Big|_{\chi=\chi_0} &= \frac{(r')^2}{1+f(\chi)} \Big|_{\chi=\chi_0}, \\ \left( \frac{a}{2} \sin \chi \cdot y \left( \pi - \frac{2}{a} \tau \right) \right)^2 \Big|_{\chi=\chi_0} &= r^2 \Big|_{\chi=\chi_0}. \end{aligned} \quad (41)$$

Разумно выбрать  $f(\chi) < 0$ , чтобы обе части второго равенства имели одинаковую зависимость от времени через функцию  $y(x)$ . Тогда вид  $r$  определяется формулой (27).

Рассмотрим второе равенство

$$\left( \frac{a}{2} \sin \chi \cdot y \left( \pi - \frac{2}{a} \tau \right) \right)^2 \Big|_{\chi=\chi_0} = \left( \frac{R}{2(-f(\chi))} \cdot y \left( \frac{2(-f(\chi))^{3/2}}{R} (\tau_0(\chi) - \tau) \right) \right)^2 \Big|_{\chi=\chi_0}. \quad (42)$$

Для его выполнения этого равенства нужно потребовать  $f(\chi_0) = -\frac{R}{a \sin \chi_0}$ ,  $\tau_0(\chi_0) = \frac{\pi}{2} a$ . Перепишем первое равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+f(\chi)}} \left( \frac{f'(\chi)}{f^2(\chi)} - \frac{1}{f(\chi)} \frac{y'(\dots)}{y(\dots)} \frac{1}{a} \left[ 2(-f(\chi))^{3/2} \tau'_0 - 3(-f(\chi))^{1/2} f'(\chi) (\tau_0(\chi) - \tau) \right] \right) \Big|_{\chi=\chi_0} = 1, \quad (43)$$

где зависимость от  $\tau$  сидит в  $y$  и в последнем слагаемом, и избавиться от нее удастся лишь обнулением всего выражения.

Таким образом, мы видим, что прямые методы поиска параметров решения заходят в тупик. Это значит, что построение единой координатной системы на получающемся многообразии невозможно для сопутствующей системы отсчета.

В рамках упомянутой выше альтернативной возможности можно рассмотреть радиальные геодезические (40). Приведем их к следующей форме заменой  $\eta \rightarrow \pi - \eta$

$$r = \frac{r_{max}}{2} (1 - \cos \eta), \quad (44)$$

$$\left(\frac{r_{max}^3}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} - \tau = \frac{1}{2} \left(\frac{r_{max}^3}{R}\right)^{\frac{1}{2}} (\eta - \sin \eta).$$

Пробные частицы в пространстве Шварцшильда движутся по этим геодезическим, если они вылетают из сингулярности, доходят до наибольшего удаления  $r_{max}$  в момент  $\tau = 0$  и падают обратно в сингулярность. Разумно построть систему, которая будет сопутствующей и для этих пробных частиц. В таком случае определение закона движения  $r(\tau, \chi)$  этих частиц полностью определит вид метрики Шварцшильда в этой системе. Закон движения, в свою очередь, можно записать в следующем виде

$$r(\tau, \chi) = \frac{r_m(\chi)}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2R^{1/2}}{r_m^{3/2}(\chi)} \tau \right), \quad (45)$$

где  $r_m(\chi)$  — некоторая функция, задающая радиус наибольшего удаления. Так как система отсчета выбрана синхронной и сопутствующей, решение (45) должно погружаться в случай общего решения уравнений (10) — (13), а это значит выбор произвольных функций  $F, f, \tau_0$  в виде

$$F(\chi) = R, \quad (46)$$

$$f(\chi) = -\frac{R}{r_m(\chi)}, \quad (47)$$

$$\tau_0(\chi) = \frac{r_m^{3/2}(\chi)}{R^{1/2}} \frac{\pi}{2}. \quad (48)$$

Видно, что теперь все параметры выразились через одну неизвестную функцию  $r_m(\chi)$ . Так как движение частиц на поверхности сферы должно описываться как в терминах внутреннего, так и в терминах внешнего решений, законы движения, задаваемые формулами (32) и (45) должны совпасть на границе. Это приводит к условию  $r_m(\chi_0) = a \sin \chi_0$ . Метрика в пустом пространстве будет вычисляться в той же форме, что и (38), но с другой функцией  $r(\tau, \chi)$ .

Тогда, хоть мы не построили сопутствующую систему отсчета с непрерывной метрикой, мы все же получили единообразное описание геометрии во внутренней и внешней областях.

Кроме того, вспомнив про значение функции  $F$ , можно найти значение параметра  $a$ . Так как вся материя расположена в области  $\chi < \chi_0$ ,

$$F(\chi_0) = a \sin^3 \chi_0 = R, \quad (49)$$

$$a = \frac{R}{\sin^3 \chi_0}. \quad (50)$$

## 2.5 Условия Израэля

Гладкость метрики, однако, не является необходимым требованием. Разрыв метрики на границе сшивки может означать как наличие поверхностных слоев материи, так и являться

координатной особенностью, как в случае координатной системы Шварцшильда. Для проверки того, в какой из случаев мы попали можно использовать условия Израэля [2]. Согласно им, одна геометрия гладко сшивается с другой на некоторой поверхности, если 3 — метрики  ${}^3g_{ik}$  и внешние кривизны  $K_{ik}$ , индуцируемые обеими геометриями на поверхности совпадают. В той координатной системе, где поверхность сшивки является поверхностью постоянства одной из координат  $x^n = const$ , а метрика является диагональной, условия сшивки можно переписать следующим образом

$$g_{ik}^{(1)} = g_{ik}^{(2)}, \quad D_i n_k \Big|_{(1)} = D_i n_k \Big|_{(2)}, \quad (51)$$

где индексы  $i, k$  пробегает значения от 0 до 3, за исключением номера, соответствующего направлению нормали, а  $D$  — ковариантная производная.

Выпишем еще раз сшиваемые метрики. В терминах решаемой задачи сшивается геометрия замкнутой модели Фридмана с линейным элементом

$$ds^2 = d\tau^2 - \left( \frac{a}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2}{a} \tau \right) \right)^2 \cdot (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (52)$$

где шварцшильдовская радиальная координата связана с  $\chi, \tau$  следующей формулой

$$r(\tau, \chi) = \frac{a}{2} \sin \chi \cdot y \left( \pi - \frac{2}{a} \tau \right), \quad (53)$$

и геометрия Шварцшильда, описываемая в системе, сопутствующей частицам, движущимся по геодезическим, описанным в (40), линейным элементом вида

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{(r')^2}{1 + f(\chi)} d\chi^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (54)$$

где радиус  $r$  зависит от переменных следующим образом

$$r(\tau, \chi) = \frac{r_m(\chi)}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2R^{1/2}}{r_m^{3/2}(\chi)} \tau \right), \quad (55)$$

и сшивка происходит при всех значениях времени  $\tau$  по сфере, задаваемой значением  $\chi = \chi_0$ .

Согласно первому условию Израэля, при  $\chi = \chi_0$  должны совпадать  $g_{00}, g_{22}, g_{33}$ . Этому можно удовлетворить, потребовав только непрерывность  $r(\tau, \chi)$ .

Теперь распишем второе условие

$$D_i n_k = \partial_i n_k - \Gamma_{ik}^\mu n_\mu. \quad (56)$$

Так как во всех точках  $n = (0, n_r, 0, 0)$

$$\partial_i n_k = 0, \quad \text{а} \quad \Gamma_{ik}^\mu n_\mu = \Gamma_{ik}^1 n_r. \quad (57)$$

Распишем связность в терминах метрики

$$\Gamma_{ik}^1 = \frac{1}{2} g^{1\mu} (\partial_i g_{\mu k} + \partial_k g_{\mu i} - \partial_\mu g_{ik}). \quad (58)$$

Если учесть, что метрика диагональна, то

$$\Gamma_{ik}^1 = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{ik}. \quad (59)$$

А тогда,

$$\begin{aligned} K_{ik} &\sim D_i n_k = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{ik} n_1 = -\frac{1}{2} g^{1\mu} \partial_1 g_{ik} n_\mu = -\frac{1}{2} n^1 \partial_1 g_{ik} = \\ &= -\frac{1}{2} n^\mu \partial_\mu g_{ik} - \text{нормальная производная метрики.} \end{aligned} \quad (60)$$

Теперь напишем условие нормировки вектора нормали  $n^\mu = (0, n, 0, 0)$

$$n^\mu n^\nu g_{\mu\nu} = -1, \quad (61)$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{-g_{11}}} = n^1. \quad (62)$$

Тогда нужна непрерывность выражения

$$n^1 \partial_1 g_{ik}, \quad (63)$$

которая, очевидно, есть для компоненты  $g_{00}$ , а для компонент  $g_{22}$  и  $g_{33}$  сводится к требованию

$$\frac{\sqrt{1+f(\chi)}}{r'} r r' = \sqrt{1+f(\chi)} r - \text{непрерывно,} \quad (64)$$

выполнение которого следует из первого условия Израэля. Таким образом единственное условие, накладываемое на функцию  $r_m(\chi)$ , параметризующую метрику Шварцшильда, состоит в том, что

$$r_m(\chi_0) = \frac{R}{\sin^2 \chi_0}. \quad (65)$$

Таким образом, можно описывать коллапс в системе, сопутствующей материи и некоторым пробным частицам во внешнем пространстве, однако метрика в такой системе будет иметь координатную особенность.

## 2.6 Построение вложения для коллапса однородного шара с начальным радиусом, совпадающим с радиусом Шварцшильда

После того, как в предыдущих параграфах была фиксирована с точностью до переопределения  $\chi$  единая система отсчета, в которой найдены метрики, как функции  $\tau, \chi, \theta, \phi$ , решающие уравнения Эйнштейна для внутренней и внешней задачи и удовлетворяющие условиям гладкой сшивки решений на границе, можно заняться описанием коллапса в терминах теории вложений, а именно, построить функцию вложения, которая будет задавать поверхность, обладающую метриками, определенными формулами (52) и (54) в соответствующих областях.

Как обсуждалось выше, оба решения в отдельности являются хорошо известными решением Фридмана для однородного пространства и решением Шварцшильда для пустого пространства, и для них уже существует целый набор известных вложений. Удобно было бы воспользоваться уже построенными функциями вложения и попытаться сшить их на границе, чему и посвящены следующие пункты.

### 2.6.1 Вложение закрытой модели Фридмана

Геометрия закрытой модели Фридмана описывается метрикой

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau) \cdot (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)). \quad (66)$$

Явный вид функций вложения, индуцирующих заданную метрику, можно найти в книге [6], для удобства приведем его здесь:

$$\begin{aligned} y^0 &= f(\tau), \\ y^1 &= a(\tau) \cos \chi, \\ y^2 &= a(\tau) \sin \chi \cos \theta, \\ y^3 &= a(\tau) \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \\ y^4 &= a(\tau) \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, \end{aligned} \quad (67)$$

где

$$f(\tau) = \int d\tau \sqrt{\dot{a}^2 + 1}, \quad (68)$$

и сигнатуру следует выбрать  $(+ - - -)$ .

Исходя из вида метрики внутренней задачи:

$$ds^2 = d\tau^2 - \left( \frac{R}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2}{R} \tau \right) \right)^2 \cdot (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (69)$$

в качестве  $a(\tau)$  следует выбрать

$$a(\tau) = \frac{R}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2}{R} \tau \right). \quad (70)$$

Кроме того, имея конкретный вид функции  $y(x)$ , можно получить явное выражение для функции  $f$ , что нам, впрочем, не пригодится.

### 2.6.2 Вложение Фронсдала для геометрии Шварцшильда

Известных вложений Шварцшильда существует несколько, для наших целей выберем вложение Фронсдала, явный вид которого можно также найти в книге [6]. Прежде всего в нем необходимо совершить преобразование координат  $(t, r, \theta, \varphi) \rightarrow (\tau, \chi, \theta, \varphi)$ , что будет соответствовать описанию геометрии Шварцшильда в используемой в предыдущих параграфах, сопутствующей системе отсчета. Чтобы совершить этот переход нужно подставить в функции:

$$\begin{aligned} y^0 &= 2R \sqrt{\frac{R}{r(\tau, \chi)} - 1} \cdot \text{ch} \left( \frac{t(\tau, \chi)}{2R} \right), \\ y^1 &= 2R \sqrt{\frac{R}{r(\tau, \chi)} - 1} \cdot \text{sh} \left( \frac{t(\tau, \chi)}{2R} \right), \\ y^2 &= R \cdot q \left( \frac{r(\tau, \chi)}{R} \right), \\ y^3 &= r(\tau, \chi) \cos \theta, \\ y^4 &= r(\tau, \chi) \sin \theta \cos \varphi, \\ y^5 &= r(\tau, \chi) \sin \theta \sin \varphi, \end{aligned} \quad (71)$$

функции  $r(\tau, \chi)$  и  $t(\tau, \chi)$ , имеющие следующий вид

$$r(\tau, \chi) = \frac{r_m(\chi)}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2R^{1/2}}{r_m^{3/2}(\chi)} \tau \right), \quad (72)$$

$$t(\tau, \chi) = R \ln \left| \frac{\left( \frac{r_m(\chi)}{R} - 1 \right)^{1/2} + \left( \frac{r_m(\chi)}{r(\tau, \chi)} - 1 \right)^{1/2}}{\left( \frac{r_m(\chi)}{R} - 1 \right)^{1/2} - \left( \frac{r_m(\chi)}{r(\tau, \chi)} - 1 \right)^{1/2}} \right| + \\ + R \left( \frac{r_m(\chi)}{R} - 1 \right)^{1/2} \left[ \arccos \left( \frac{2r(\tau, \chi)}{r_m(\chi)} - 1 \right) + \frac{\tau}{R^{1/2} r_m^{1/2}(\chi)} \right]. \quad (73)$$

Вид для функции  $t$  приводится в [2], сигнатура вложения  $(+ - - - -)$ . Функция  $q(x)$  определяется выражением

$$q(x) = \int_1^x \sqrt{\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3}} du. \quad (74)$$

Следует еще упомянуть, что для сшивки берется только часть вложения Фронсдала, соответствующая области под горизонтом и только падающую его часть, так как внутреннее решение и граница сшивки в данной постановке задачи всегда лежат под горизонтом и соответствует коллапсу. Вспомним также, что метрика Шварцшильда в новой системе отсчета запишется в виде

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{(r'(\tau, \chi))^2}{1 - \frac{R}{r_m(\chi)}} d\chi^2 - r^2(\tau, \chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (75)$$

где штрих, как и ранее, дифференцирование по  $\chi$ .

### 2.6.3 Поверхность сшивки

Так как по теореме Казнера [9] не существует пятимерного вложения для Шварцшильда, очевидно, что необходимо модифицировать вложение для Фридмана, расширив его, по меньшей мере, до шестимерного. Чтобы понять, как это сделать, рассмотрим подмногообразие, по которому необходимо произвести сшивку. Вспомним, что в результате выбора системы отсчета, с учетом специальных начальных условий, поверхность сшивки описывается условием  $\chi = \frac{\pi}{2}$ .

Подставим это значение и, заметив, что

$$t \left( \tau, \frac{\pi}{2} \right) \equiv 0, \quad r_m \left( \frac{\pi}{2} \right) = R, \quad (76)$$

получим поверхность сшивки в терминах функций обоих вложений:

$$y^0 = f(\tau),$$

$$y^0 = 2R\sqrt{\frac{2}{y(\dots)} - 1},$$

$$y^2 = R \cdot q\left(\frac{y(\dots)}{2}\right),$$

$$y^1 = 0,$$

$$y^2 = \frac{R}{2} \cdot y\left(\pi - \frac{2}{R}\tau\right) \cos \theta,$$

$$y^3 = \frac{R}{2} \cdot y\left(\pi - \frac{2}{R}\tau\right) \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y^4 = \frac{R}{2} \cdot y\left(\pi - \frac{2}{R}\tau\right) \sin \theta \sin \varphi,$$

$$y^1 = 0, \tag{77}$$

$$y^3 = \frac{R}{2} \cdot y\left(\pi - \frac{2}{R}\tau\right) \cos \theta,$$

$$y^4 = \frac{R}{2} \cdot y\left(\pi - \frac{2}{R}\tau\right) \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y^5 = \frac{R}{2} \cdot y\left(\pi - \frac{2}{R}\tau\right) \sin \theta \sin \varphi,$$

Линией отделены части, в точности совпадающие на поверхности. Видно, что модификации требует только нулевая компонента функции вложения для Фридмана, что является весьма удобным обстоятельством. Удобство заключается в том, что  $y^0$  является функцией только от  $\tau$ , а следовательно подбирается так, чтобы дать правильный вклад в  $g_{00}$  компоненту метрики. Если вспомнить определение функции  $f(\tau)$ , то можно понять, что необходимый вклад от нулевой компоненты задается формулой

$$(\partial_\tau y^0)^2 = (\dot{a})^2 + 1 = y_x^2 + 1, \tag{78}$$

где  $y_x$  — производная функции  $y$  по своему аргументу. Из того, что  $g_{00} = 1$  следует, что суммарный вклад от «нижних» компонент вложения равен  $y_x^2$ . Такой же вклад будут давать и «нижние» компоненты вложения Шварцшильда, так как они входят с идентичной сигнатурой, а так как в выбранной нами системе координат  $g_{00}$  компонента Шварцшильдовского решения так же равна 1, вклад от двух «верхних» компонент должен в точности совпасть с требуемым  $y_x^2 + 1$ . Тогда, так как Шварцшильдовские  $y^0$  и  $y^2$  на границе сшивки являются функциями только  $\tau$ , естественной модификацией вложения Фридмана будет раздвоение  $y^0$  компоненты на две, равные соответственно компонентам  $y^0$  и  $y^2$  вложения Фронсдала для внутренней области, взятые при  $R = \frac{\pi}{2}$ . Не лишним будет убедиться напрямую, что  $y^0$  и  $y^2$  компоненты дадут нужный вклад в  $g_{00}$ :

$$(\dot{y}^0)^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^4 \frac{y_x^2}{\frac{2}{y} - 1}, \tag{79}$$

$$(\dot{y}^2)^2 = \left(\frac{2}{y} + \left(\frac{2}{y}\right)^2 + \left(\frac{2}{y}\right)^3\right) y_x^2, \tag{80}$$

а тогда, учитывая свойство функции  $y(x)$ , указанное в приложении (см. A.1) и сигнатуру вложения Фронсдала, получаем

$$(\dot{y}^0)^2 - (\dot{y}^2)^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^4 - \left(\frac{2}{y} + \left(\frac{2}{y}\right)^2 + \left(\frac{2}{y}\right)^3\right) \left(\frac{2}{y} - 1\right) = \frac{2}{y} = \frac{2}{y} - 1 + 1 = y_x^2 + 1, \tag{81}$$

в чем мы и хотели убедиться.



### 2.6.4 Конечные формулы вложения

Теперь нетрудно выписать формулы, задающие вложение коллапса в соответствующих областях:

$$\begin{aligned}
 &\text{при } 0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}, & \text{при } \chi \geq \frac{\pi}{2}, \\
 &y^0 = 2R \sqrt{\frac{2}{y(\dots)} - 1}, & y^0 = 2R \sqrt{\frac{R}{r(\tau, \chi)} - 1} \cdot \text{ch} \left( \frac{t(\tau, \chi)}{2R} \right), \\
 &y^1 = \frac{R}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2}{R} \tau \right) \cos \chi, & y^1 = 2R \sqrt{\frac{R}{r(\tau, \chi)} - 1} \cdot \text{sh} \left( \frac{t(\tau, \chi)}{2R} \right), \\
 &y^2 = R \cdot q \left( \frac{y(\dots)}{2} \right), & y^2 = R \cdot q \left( \frac{r(\tau, \chi)}{R} \right), \\
 &y^3 = \frac{R}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2}{R} \tau \right) \sin \chi \cos \theta, & y^3 = r(\tau, \chi) \cos \theta, \\
 &y^4 = \frac{R}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2}{R} \tau \right) \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, & y^4 = r(\tau, \chi) \sin \theta \cos \varphi, \\
 &y^5 = \frac{R}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2}{R} \tau \right) \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, & y^5 = r(\tau, \chi) \sin \theta \sin \varphi,
 \end{aligned} \tag{82}$$

Сигнатура вложения  $(+, -, -, -, -, -)$ , а функции  $t(\tau, \chi)$  и  $r(\tau, \chi)$ , как и раньше

$$r(\tau, \chi) = \frac{r_m(\chi)}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2R^{1/2}}{r_m^{3/2}(\chi)} \tau \right), \tag{83}$$

$$\begin{aligned}
 t(\tau, \chi) = R \ln & \left| \frac{\left( \frac{r_m(\chi)}{R} - 1 \right)^{1/2} + \left( \frac{r_m(\chi)}{r(\tau, \chi)} - 1 \right)^{1/2}}{\left( \frac{r_m(\chi)}{R} - 1 \right)^{1/2} - \left( \frac{r_m(\chi)}{r(\tau, \chi)} - 1 \right)^{1/2}} \right| + \\
 & + R \left( \frac{r_m(\chi)}{R} - 1 \right)^{1/2} \left[ \arccos \left( \frac{2r(\tau, \chi)}{r_m(\chi)} - 1 \right) + \frac{\tau}{R^{1/2} r_m^{1/2}(\chi)} \right].
 \end{aligned} \tag{84}$$

Можно также нарисовать линию сшивки на диаграмме Крускала, она соответствует линии нулевого Шварцшильдовского времени.

На диаграмме, приведенной на Рис.2, построена только часть линии, отвечающая параметру  $\tau > 0$ . Часть линии, отвечающая  $\tau < 0$  определяет предысторию коллапса и, вообще говоря, не задана. Однако в предположении о том, что материя все время оставалась пылевидной, предыстория коллапса может быть симметричным образом восстановлена, и получена картина, приведенная на Рис.3.

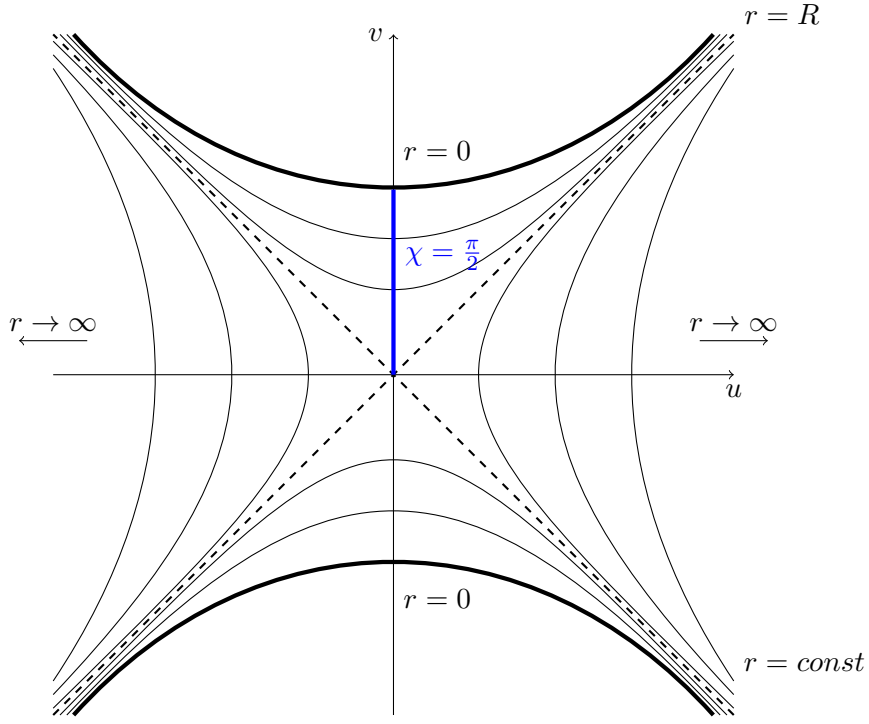


Рис. 2: Мировая линия частицы на поверхности сжимающегося облака на диаграмме Крускала.

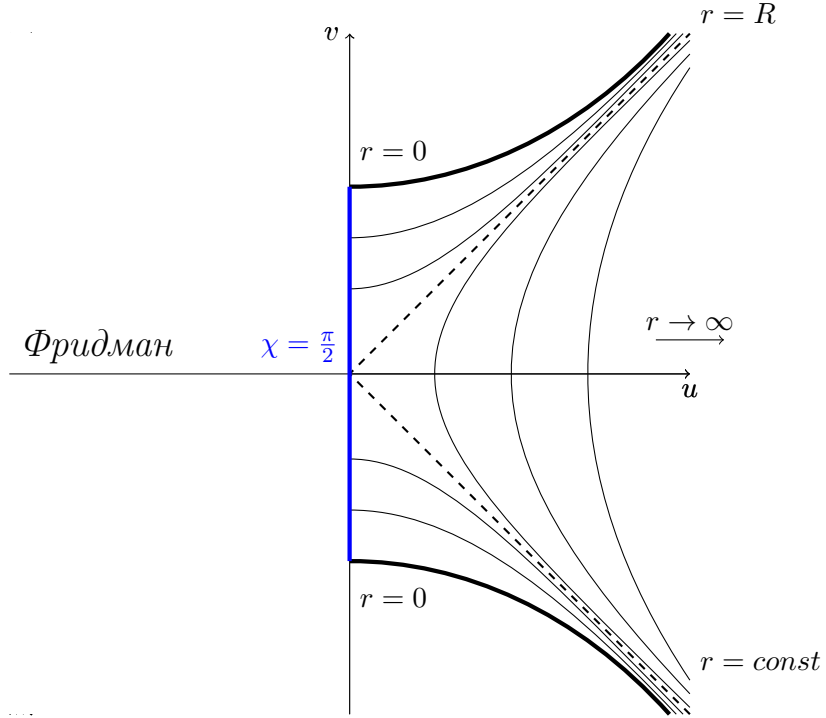


Рис. 3: Диаграмма Крускала, в которой правомочна только правая относительно  $\chi = \frac{\pi}{2}$  часть, в которой действует решение Шварцшильда.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что частный случай коллапса однородного шара пылевидной материи с используемыми начальными условиями не отделяет нашу вселенную от белой дыры, что хотелось бы наблюдать при описании реалистичного коллапса,

при котором черная дыра возникает при сжатии звезды.

Полезным будет описать получившуюся поверхность в терминах, не зависящих от выбора конкретных координат. Это можно сделать либо заданием нужного количества уравнений, связывающих координаты  $y^a$  (в данном случае нужно два уравнения, так как класс вложения два), либо, если поверхность проецируема на некоторое подпространство, задать ее с помощью набора функций  $y^a = y^a(y^b)$ , где индексы  $b$  относятся к векторам пространства, на которое производится проецирование.

Для вложения Фронсдала известно задание с помощью двух уравнений

$$(y^3)^2 + (y^4)^2 + (y^5)^2 = \frac{R^2}{\left(\frac{(y^0)^2 - (y^1)^2}{4R^2} + 1\right)^2}, \quad (85)$$

$$y^2 = R \, q \left( \frac{\sqrt{(y^3)^2 + (y^4)^2 + (y^5)^2}}{R} \right). \quad (86)$$

В случае коллапса это задание будет работать при значениях  $y^1 \geq 0$ . Значение  $y^1 = 0$  отвечает поверхности сшивки, а область  $y^1 \leq 0$  будет отвечать вложению Фридмана, для которого также можно построить задание с помощью двух уравнений

$$(y^1)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 + (y^5)^2 = \frac{R^2}{\left(\frac{(y^0)^2}{4R^2} + 1\right)^2}, \quad (87)$$

$$y^2 = R \, q \left( \frac{\sqrt{(y^1)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 + (y^5)^2}}{R} \right). \quad (88)$$

По полученным формулам можно убедиться в гладкости построенного вложения.

Можно также построить различные двумерные сечения получившейся поверхности, например приведенное на Рис. 4.

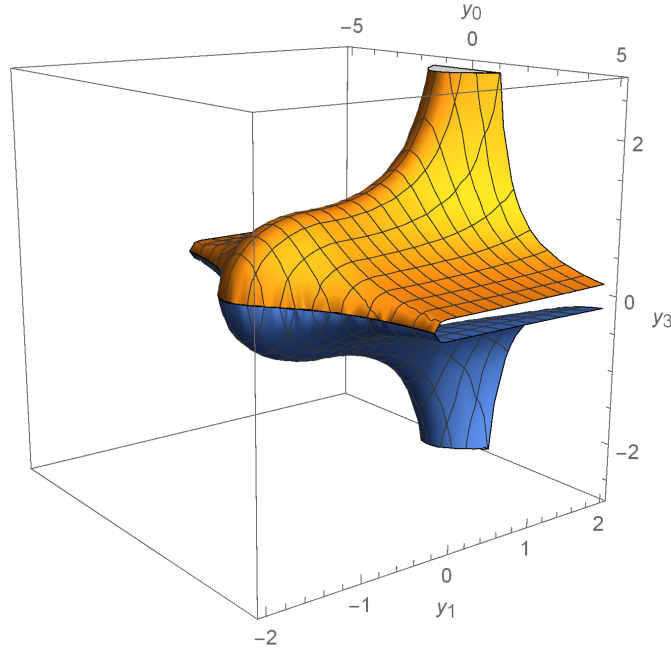


Рис. 4: Сечение  $y^4 = y^5 = 0$  в координатах  $y^0$ ,  $y^1$  и  $y^3$ .

На рисунке представлена поверхность, получаемая сшивкой двух, отвечающих геометриям Шварцшильда и Фридмана. Абсолютное значение координаты  $y_3$  в данном сечении равняется радиальной координате  $r$ . Верхняя относительно плоскости  $y^3 = 0$  часть поверхности соответствует значению угла  $\theta = 0$ , нижняя —  $\theta = \pi$ . Линия сшивки различных геометрий получается сечением поверхности плоскостью  $y_1 = 0$ . Правая область ( $y^1 > 0$ ) отвечает геометрии Шварцшильда и пустому пространству, и включает в себя как все пространство за горизонтом ( $r > R$ ), так и часть пространства под горизонтом ( $r < R$ ), в которой материя отсутствует. Левая соответствует внутренней области однородного пылевого облака, полностью находящегося под горизонтом. Сечение  $y_0 = 0$  определяет момент  $\tau = 0$ . Поверхность в целом определяет пространственно однородное пылевое облако, вылетающее из сингулярности, соответствующей белой дыре, расширяющееся вплоть до своего радиуса Шварцшильда, после чего, падающее обратно в сингулярность, соответствующую черной дыре, за конечное собственное время.

## 2.7 Построение вложения для коллапса однородного шара с произвольным начальным радиусом

Отличие от случая, рассмотренного выше состоит в том, что для значения  $\chi_0$ , отличного от  $\frac{\pi}{2}$ , появляются несовпадающие компоненты функций вложения Фридмана и Фронсдала. Совпадают только три из пяти компонент Фридмана:  $y^2, y^3, y^4$ . А  $y^1$  не совпадает ни с одной из трех оставшихся компонент вложения Фронсдала. Такая же ситуация происходит в случае рассмотрения других известных шестимерных вложений Шварцшильда.

Если отказаться от поиска шестимерного вложения и рассмотреть какое-нибудь известное шестимерное вложение Шварцшильда, обладающее блоком:  $r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi$ , и добавить компоненту  $y^6 = f(r)$ , можно найти решение задачи в случае произвольного начального радиуса. В таком случае, однако, придется корректировать остальные функции вложения, чтобы получить нужную индуцированную метрику. Но в известных вложениях, таких как вложение Фронсдала или асимптотически плоское вложение, есть функция радиуса, определяющаяся так, чтобы дать определенный вклад в  $g_{11}$  компоненту метрики. При добавлении  $y^6$  меняется лишь этот вклад, и, следовательно, достаточно поменять только упомянутую функцию радиуса. Во вложении Фронсдала это приведет к изменению функции  $q(x)$ .

### 2.7.1 Сшивка вложения Фридмана с семимерной модификацией Фронсдала

Рассмотрим формулы вложения на границе сшивки. Видно, что если выбрать для Фронсдала  $y^6 = r \operatorname{ctg} \chi_0$ , то весь пространственный блок Фридмана совпадет, с учетом вида функции  $r(\tau, \chi)$ , с компонентами  $y^3 - y^6$  Фронсдала. Сигнатуру следует выбрать  $(+, -, -, -, -, -, -)$ . Тогда можно действовать согласно уже использованной схеме: разделить оставшуюся компоненту из Фридмана на три компоненты, взятые из вложения Фронсдала с зафиксированным значением  $\chi = \chi_0$ . Так как компонента метрики  $g_{00}$  одинаковы для Фридмана и для Шварцшильда, они дадут в нее нужный вклад.

Фридман

$$\begin{aligned}
y^0 &= f(\tau), \\
y^1 &= \frac{R}{2 \sin^3 \chi_0} \cdot y \left( \pi - \frac{2 \sin^3 \chi_0}{R} \tau \right) \cos \chi_0, \\
y^2 &= \frac{R}{2 \sin^3 \chi_0} \cdot y \left( \pi - \frac{2 \sin^3 \chi_0}{R} \tau \right) \sin \chi_0 \cos \theta, \\
y^3 &= \frac{R}{2 \sin^3 \chi_0} \cdot y \left( \pi - \frac{2 \sin^3 \chi_0}{R} \tau \right) \sin \chi_0 \sin \theta \cos \varphi, \\
y^4 &= \frac{R}{2 \sin^3 \chi_0} \cdot y \left( \pi - \frac{2 \sin^3 \chi_0}{R} \tau \right) \sin \chi_0 \sin \theta \sin \varphi,
\end{aligned}$$

Фронсдал

$$\begin{aligned}
y^0 &= 2R \sqrt{\frac{R}{r(\tau, \chi_0)} - 1} \cdot \operatorname{ch} \left( \frac{t(\tau, \chi_0)}{2R} \right), \\
y^1 &= 2R \sqrt{\frac{R}{r(\tau, \chi_0)} - 1} \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{t(\tau, \chi_0)}{2R} \right), \\
y^2 &= R \cdot q_{\chi_0} \left( \frac{r(\tau, \chi_0)}{R} \right), \\
y^3 &= r(\tau, \chi_0) \cos \theta, \\
y^4 &= r(\tau, \chi_0) \sin \theta \cos \varphi, \\
y^5 &= r(\tau, \chi_0) \sin \theta \sin \varphi, \\
y^6 &= r(\tau, \chi_0) \operatorname{ctg} \chi_0.
\end{aligned} \tag{89}$$

### 2.7.2 Конечные формулы вложения

Соберем вместе получающиеся функции вложения.

В случае  $r(\tau, \chi) < R$

Фридман

$$\begin{aligned}
y^0 &= 2R \sqrt{\frac{R}{r(\tau, \chi_0)} - 1} \cdot \operatorname{ch} \left( \frac{t(\tau, \chi_0)}{2R} \right), \\
y^1 &= 2R \sqrt{\frac{R}{r(\tau, \chi_0)} - 1} \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{t(\tau, \chi_0)}{2R} \right), \\
y^2 &= R \cdot q_{\chi_0} \left( \frac{r(\tau, \chi_0)}{R} \right), \\
y^3 &= r(\tau, \chi) \cos \theta, \\
y^4 &= r(\tau, \chi) \sin \theta \cos \varphi, \\
y^5 &= r(\tau, \chi) \sin \theta \sin \varphi, \\
y^6 &= r(\tau, \chi) \operatorname{ctg} \chi,
\end{aligned}$$

Фронсдал

$$\begin{aligned}
y^0 &= 2R \sqrt{\frac{R}{r(\tau, \chi)} - 1} \cdot \operatorname{ch} \left( \frac{t(\tau, \chi)}{2R} \right), \\
y^1 &= 2R \sqrt{\frac{R}{r(\tau, \chi)} - 1} \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{t(\tau, \chi)}{2R} \right), \\
y^2 &= R \cdot q_{\chi_0} \left( \frac{r(\tau, \chi)}{R} \right), \\
y^3 &= r(\tau, \chi) \cos \theta, \\
y^4 &= r(\tau, \chi) \sin \theta \cos \varphi, \\
y^5 &= r(\tau, \chi) \sin \theta \sin \varphi, \\
y^6 &= r(\tau, \chi) \operatorname{ctg} \chi_0.
\end{aligned}$$

И в случае  $r(\tau, \chi) > R$

Фридман	Фронсдал
$y^0 = 2R\sqrt{1 - \frac{R}{r(\tau, \chi_0)}} \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{t(\tau, \chi_0)}{2R} \right),$	$y^0 = 2R\sqrt{1 - \frac{R}{r(\tau, \chi)}} \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{t(\tau, \chi)}{2R} \right),$
$y^1 = 2R\sqrt{1 - \frac{R}{r(\tau, \chi_0)}} \cdot \operatorname{ch} \left( \frac{t(\tau, \chi_0)}{2R} \right),$	$y^1 = 2R\sqrt{1 - \frac{R}{r(\tau, \chi)}} \cdot \operatorname{ch} \left( \frac{t(\tau, \chi)}{2R} \right),$
$y^2 = R \cdot q_{\chi_0} \left( \frac{r(\tau, \chi_0)}{R} \right),$	$y^2 = R \cdot q_{\chi_0} \left( \frac{r(\tau, \chi)}{R} \right),$
$y^3 = r(\tau, \chi) \cos \theta,$	$y^3 = r(\tau, \chi) \cos \theta,$
$y^4 = r(\tau, \chi) \sin \theta \cos \varphi,$	$y^4 = r(\tau, \chi) \sin \theta \cos \varphi,$
$y^5 = r(\tau, \chi) \sin \theta \sin \varphi,$	$y^5 = r(\tau, \chi) \sin \theta \sin \varphi,$
$y^6 = r(\tau, \chi) \operatorname{ctg} \chi,$	$y^6 = r(\tau, \chi) \operatorname{ctg} \chi_0.$

Сигнатура вложения  $(+, -, -, -, -, -, -)$ . Функция  $r(\tau, \chi)$  для случая Фридмана

$$r(\tau, \chi) = \frac{R \sin \chi}{\sin^3 \chi_0} \cdot y \left( \pi - \frac{2 \sin^3 \chi_0}{R} \tau \right) \quad (90)$$

и для случая Шварцшильда

$$r(\tau, \chi) = \frac{r_m(\chi)}{2} \cdot y \left( \pi - \frac{2R^{1/2}}{r_m^{3/2}(\chi)} \tau \right). \quad (91)$$

Функция  $t(\tau, \chi)$  определяется для обоих случаев одинаково

$$t(\tau, \chi) = R \ln \left| \frac{\left( \frac{r_m(\chi)}{R} - 1 \right)^{1/2} + \left( \frac{r_m(\chi)}{r(\tau, \chi)} - 1 \right)^{1/2}}{\left( \frac{r_m(\chi)}{R} - 1 \right)^{1/2} - \left( \frac{r_m(\chi)}{r(\tau, \chi)} - 1 \right)^{1/2}} \right| + \quad (92)$$

$$+ R \left( \frac{r_m(\chi)}{R} - 1 \right)^{1/2} \left[ \arccos \left( \frac{2r(\tau, \chi)}{r_m(\chi)} - 1 \right) + \frac{\tau}{R^{1/2} r_m^{1/2}(\chi)} \right].$$

Функция  $q_{\chi_0}(x)$  определяется выражением

$$q_{\chi_0}(x) = \int_C^x \sqrt{\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3} - \operatorname{ctg}^2 \chi_0} du. \quad (93)$$

Подкоренное выражение положительно при малых значениях  $u$ , следовательно вложение будет покрывать некоторую область пространства, ограниченную сферой определенного радиуса.

В отличие от предыдущего случая, в этом не удастся одним и тем же образом описать поверхность в Фридмановой и Шварцшильдовой областях в терминах переменных объемлющего пространства, задав ее нужным количеством уравнений или выразив одни переменные через другие. Однако, по построенным сечениям (5) и (6) можно увидеть, что поверхность получается лишь непрерывной.

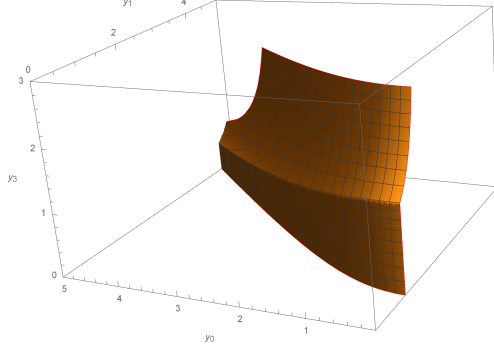


Рис. 5: Сечение  $y^4 = y^5 = 0$  в координатах  $y^0$ ,  $y^1$  и  $y^3$ .

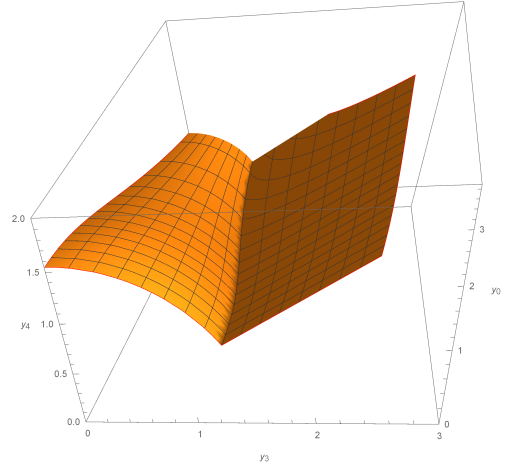


Рис. 6: Сечение  $y^4 = y^5 = 0$  в координатах  $y^0$ ,  $y^3$  и  $y^4$ .

Эта особенность вложения не связана с разрывностью метрики. Последняя является исключительно координатной особенностью, в чем мы уже убеждались, проверив условия Израэля, и в чем можно убедиться напрямую, перейдя в координатную систему  $(\tau, r, \theta, \varphi)$ .

Действительно, якобиан перехода

$$\frac{\partial(r, \tau)}{\partial(\chi, \tau)} = \begin{vmatrix} r' & 0 \\ \dot{r} & 1 \end{vmatrix} = r' \neq 0. \quad (94)$$

Частные производные старых координат равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial r} &= \frac{1}{r'}, & \frac{\partial \tau}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial \tau} &= -\frac{\dot{r}}{r'}, & \frac{\partial \tau}{\partial \tau} &= 1. \end{aligned} \quad (95)$$

Их дифференциалы тогда можно записать в виде

$$d\tau = d\tau, \quad d\chi = \frac{1}{r'} dr - \frac{\dot{r}}{r'} d\tau. \quad (96)$$

И тогда метрика

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{(r')^2}{1 + f(\chi)} d\chi^2 - r^2 d\Omega \quad (97)$$

перейдет в

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{1 + f(\chi)}\right) d\tau^2 + 2 \frac{\dot{r}}{1 + f(\chi)} dr d\tau - \frac{dr^2}{1 + f(\chi)}. \quad (98)$$

В силу непрерывности функций  $r$  и  $f$ , требуемых условиями Израэля, а также непрерывности  $\dot{r}$ , получившаяся метрика оказывается непрерывной.

### 3 Построение коллапса однородного пылевидного шара без сшивания решений

Как видно, подход к задаче, в котором строятся отдельные вложения для областей внутри и вне материи, и впоследствии сшиваются на границе, приносит некоторые плоды, однако не является охватывающим все возможные пути решения поставленной задачи. Например,

можно описать пространство, содержащее оба решения единой непрерывной метрикой, чего не удастся сделать в сопутствующей системе отсчета, и решить уравнения вложения для этой метрики.

### 3.1 Непрерывная метрика для коллапса однородного шара

Как было описано выше, переход к координатам  $(\tau, r, \theta, \varphi)$  дает непрерывную метрику для коллапса. Можно однако рассмотреть более простой случай. Метрика

$$ds^2 = \left(1 - \frac{4F(\tau, r)}{9r}\right) d\tau^2 - 2\frac{3}{2}\sqrt{\frac{F(\tau, r)}{r}} dr d\tau - dr^2 - r^2 d\Omega \quad (99)$$

Определяет тензор энергии импульса сжимающегося однородного шара, если в качестве  $F$  выбрать функцию

$$F(\tau, r) = \min\left(\frac{r^3}{(1-\tau)^2}, F_0\right), \quad (100)$$

где  $F_0$  — некоторая постоянная, связанная с радиусом Шварцшильда. Можно понять, что такая метрика соответствует выбору в сопутствующей системе координат зависимости  $r(\tau, \chi)$  согласно формуле (24). Такой подход глобально отличается тем, что частицы материи в облаке при движении не имеют точки максимального удаления.

Для упрощения дальнейшей работы сделаем несколько простых замен координат. Во-первых,  $\tau' = 1 - \tau$ , и  $p = \frac{r^3}{\tau'^2}$ . Функция  $F$  теперь является функцией только  $p$ . Метрика в таких переменных имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{4F}{9p^{1/3}\tau'^{2/3}} + \frac{8F^{1/2}}{9p^{1/6}\tau'^{1/3}}p^{1/3}\tau'^{-1/3}\right) d\tau'^2 + \frac{4F^{1/2}}{9p^{1/6}\tau'^{1/3}}p^{-2/3}\tau'^{2/3} dp d\tau' - (dr(\tau', p))^2 - r(\tau', p)^2 d\Omega. \quad (101)$$

В качестве последней замены выберем  $t = \tau'^{2/3}$ . Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = (\alpha t + f(p)) dt^2 + h(p)t dp dt - (dr(t, p))^2 - r(t, p)^2 d\Omega, \quad (102)$$

где  $\alpha = \frac{9}{4}$ ,  $f(p) = 2F(p)^{1/2}p^{1/6} - F(p)p^{-1/3}$ ,  $h(p) = \frac{2F(p)^{1/2}}{3p^{5/6}}$ . Для этой метрики и построим вложение.

### 3.2 Построение вложения непрерывной метрики и конечные формулы

Если в качестве трех функций вложения выбрать блок  $(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi)$ , то останется вложить метрику

$$ds^2 = (\alpha t + f(p)) dt^2 + h(p)t dp dt. \quad (103)$$

Видно, что ее компоненты являются полиномами по переменной  $t$ . Тогда можно искать решение уравнений вложения также в виде полиномов. Удобнее всего это сделать в светопо-



добных координатах объемлющего пространства. Решение представимо в виде

$$y^+ = t^3 - \frac{\alpha}{4}t^2 - \frac{f(p)}{2}t, \quad (104)$$

$$y^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}t^2 + \frac{1}{\sqrt{6}} \int h(p)dp - \frac{1}{2\sqrt{6}}f(p), \quad (105)$$

$$y^- = t, \quad (106)$$

$$y^4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \int h(p)dp - \frac{1}{2\sqrt{6}}f(p). \quad (107)$$

Метрика объемлющего пространства

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (108)$$

и при переходе к обычным координатам имеет сигнатуру  $(+, +, -, -)$ .

Чтобы получить полный набор функций вложения нужно дописать блок

$$y^5 = p^{1/3}t \cos \theta, \quad (109)$$

$$y^6 = p^{1/3}t \sin \theta \cos \varphi, \quad (110)$$

$$y^7 = p^{1/3}t \sin \theta \sin \varphi. \quad (111)$$

Итого, если вернуться к изначальным переменным, получится набор функций вложения

$$\begin{aligned} y^+ &= (\tau')^2 - \frac{\alpha}{4}(\tau')^{4/3} - \frac{f\left(\frac{r^3}{(\tau')^2}\right)}{2}(\tau')^{2/3}, \\ y^2 &= \sqrt{\frac{3}{2}}(\tau')^{4/3} + \frac{1}{\sqrt{6}} \int_C^{\frac{r^3}{(\tau')^2}} h(p)dp - \frac{1}{2\sqrt{6}}f\left(\frac{r^3}{(\tau')^2}\right), \\ y^- &= (\tau')^{2/3}, \\ y^4 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_C^{\frac{r^3}{(\tau')^2}} h(p)dp - \frac{1}{2\sqrt{6}}f\left(\frac{r^3}{(\tau')^2}\right), \\ y^5 &= r \cos \theta, \\ y^6 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y^7 &= r \sin \theta \sin \varphi, \end{aligned} \quad (112)$$

где  $\tau'$  можно воспринимать как собственное время частиц, оставшееся до падения на сингулярность.

Таким образом, вложение получается семимерным с сигнатурой  $(+, +, -, -, -, -, -)$ . Оно, однако, тоже содержит излом, так как выражается через функцию  $F(p)$ , которая является лишь непрерывной.

## 4 Заключение

В конце коротко подведем итоги проведенного исследования. В данной работе проводилось исследование процесса коллапса пылевидной материи и образования горизонта черной дыры в рамках общей теории относительности с целью его описания на языке теории вложения.

В работе удалось конструктивным образом построить гладкое вложение с одним временно-неподобным направлением для случая черной дыры с распределенной материей, в котором материя при движении не покидает области, ограниченной горизонтом. Также, удалось построить два менее гладких вложения, в которых материя выходит за пределы горизонта, а значит существуют промежутки времени, на которых горизонта нет.

Первые два из этих вложений описывают материю, вылетающую из белой дыры, долетающую до точки максимального удаления и падающую обратно на сингулярность, третье описывает падение в сингулярность материи с пространственной бесконечности.

## А Приложения

### А.1 Обращение параметрической зависимости, функция $y(x)$

Формула параметрического задания функции  $y(x)$  соответствуют параметрическому заданию циклоиды. Тогда график функции  $y(x)$  выглядит следующим образом

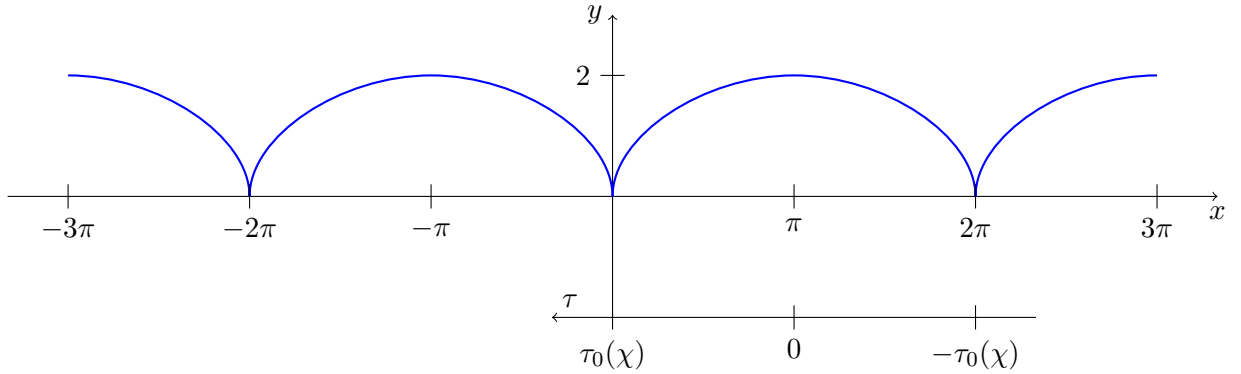


Рис. 7: График  $y(x)$

На отдельной оси показана область значений, пробегаемая параметром  $\tau$ , если подставлять в функцию  $y$  вместо  $x$  соответствующее выражение, стоящее в формулах коллапса.

#### Полезные свойства:

- Выражение для производной

$$y = 1 - \cos \eta \quad (113)$$

$$x = \eta - \sin \eta \quad (114)$$

$$y_x = \frac{y_\eta}{x_\eta} = \frac{\sin \eta}{1 - \cos \eta} = \frac{\sqrt{1 - (1 - y)^2}}{y} = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}. \quad (115)$$

## Список литературы

- [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика т.II Теория поля*, Наука, Москва, 1988.
- [2] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. *Гравитация т.I — III*, Мир, Москва, 1977.
- [3] T. Regge, C. Teitelboim. *General relativity à la string: a progress report*, in Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting, Trieste, Italy, 1975, ed. R. Ruffini. Amsterdam, North Holland, 1977, pp. 77–88.
- [4] A. Friedman. *J. Math. Mech.*, v. 10, p. 625, 1961.
- [5] C. Fronsdal. *Phys. Rev.*, v. 116, N 3, pp. 778–781, 1959.
- [6] С.А. Пастон. *Гравитация как теория вложения*, LAMBERT Academic Publishing, 2012.
- [7] В.А. Рубан. *ЖЭТФ* 56, 1969.
- [8] И.Д. Новиков, В.П. Фролов. *Физика черных дыр*, Наука, Москва, 1986.
- [9] E. Kasner. *Am. J. Math.*, v. 43, N 2, pp. 126–129, 1921.